Функцияны зерттеуге қатысты олимпиада есептері

I. Монотонность функций

Предполагается, что читатель знаком с понятием монотонности функций и свойствами (критериями) монотонных функций.

Задача 1. Сравнить числа *e* и e^e.

Решение. Рассматривается функция $f : [e; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$
Так как производная функции *f*,

$$f'(x) = \frac{x(\ln x)' - (x)' \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Принимает отрицательные значения для всех *x* □ (*e*;+□) и *f* непрерывна на [*e*;+□), следовательно, *f* строго убывает на [*e*;+□). Отсюда, учитывая что *e* < □, получаем

$$f(e) > f(\pi) \ \Rightarrow \ \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \ \Rightarrow \ \pi \ln e > e \ln \pi$$

и, значит, *e* > □^{e}.

Задача 2. Исследовать на ограниченность числовую последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

Решение. Вначале докажем неравенство $\ln(1 + x) \leq x \quad (x \geq 0)$. (1)

Для этого рассмотрим функцию *f*:[0;+□) □ **R**; $f(x) = x - \ln(1 + x)$.
Функция *f* непрерывна на области определения, и для любого *x* □ (0;+□) имеет место равенство

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

откуда следует, что *f* □(*x*) > 0 (*x* € (0;+□)). Следовательно, функция *f* строго возрастает на области определения *D*(*f*), и, значит, $f(x) \geq f(0)$ (□$x \geq 0$), что означает справедливость неравенства (1).

В неравенстве (1), рассмотрев $x = {}^1/_n$ (n = 1,2,...), получим

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Из неравенства (2) следует

$$\begin{aligned}
&\ln 2 - \ln 1 \leq 1, \\
&\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}, \\
&\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}, \\
&\ldots\ldots \\
&\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Сложив почленно неравенства (3), получим неравенство

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty,$ из последнего неравенства следует, что числовая последовательность $x_n = 1 + {}^1/_2 + \ldots + {}^1/_n$ неограничена.

Следствие: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Задача 3. (Неравенство Бернулли). Для любых $x > -1$; $n > 1$ имеет место неравенство

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \qquad (4)$$

Причем равенство имеет место только при $x = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$, ($x$Є[-1;+∞)), где n - фиксированное число, большее 1. Вычислим производную этой функции

$$f\,'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n((1 + x)^{n-1} - 1) \quad (x > -1).$$

Из условия n > 1, следует, что $f\,'(x) < 0$ для x Є(-1;0) и $f\,'(x) > 0$ для xЄ(0;+∞). Значит, функция *f* убывает на [-1;0] и возрастает на [0;+∞).

Отсюда заключаем, что для всех xЄ[-1;+∞\{0} имеет место неравенство $f(x) > f(0)$, то есть,

$$(1 + x)^n - 1 - nx > 1 - 1$$

или $(1 + x)^n > 1 + nx$ $(x \in [-1;0) \cup (0;+n),\ n > 1)$.
Остается заметить, что при $x=0$ выполняется $(1 + x)^n = 1 + nx$.

Замечание. Аналогично доказываются неравенства
$(1 + x)^n \le 1 + nx$ $(x \ge -1;\ 0 < n < 1)$,
$(1 + x)^n \ge 1 + nx$ $(x \ge -1;\ n < 0)$.

Задача 4. (Неравенство Юнга) Если $p, q \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ удовлетворяют свойству $1/p + 1/q = 1$, то для любых положительных чисел a, b выполняются неравенства

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{для } p > 1) \tag{5}$$

и

$$ab \ge \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{для } p < 1) \tag{6}$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$.

Решение. Рассмотрим случай $p > 1$. Зафиксировав произвольное положительное число a, определим функцию

$$f : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Производная этой функции равна $f'(b) = b^{q-1} - a$.

Элементарными вычислениями устанавливается, что точка $b = a^{\frac{1}{q-1}}$ является точкой глобального минимума, т. е.

$$f(b) \ge f(a^{\frac{1}{q-1}}) \qquad (b > 0). \tag{7}$$

Из неравенства (7), учитывая, что $1/p + 1/q = 1$, получается

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \ge 0 \qquad \left(a > 0,\ b > 0;\ p > 1;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Таким образом, неравенство (5) доказано. Более того, из (7) следует, что равенство имеет место только в случае $b = a^{\frac{1}{q-1}}$, т. е. $a^p = b^q$.
Неравенство (6) доказывается аналогично.

Задача 5. Доказать неравенство $|\sin x| \le |x|$ $(x \in \mathbf{R})$. (8)

Решение. В силу четности обоих частей, достаточно рассмотреть ситуацию $x \ge 0$. Более того, т. к. $|\sin x| \le 1$, то достаточно изучить случай $0 \le x \le 1$.

С этой целью рассмотрим функцию $f:[0;1] \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin x$.
Производная функции f имеет вид $f'(x)=1-\cos x$ $(x \in [0;1])$.
На основании ограниченности косинуса ($|\cos x| \le 1;\ x \in \mathbf{R}$), заключаем что $f'(x) \ge 0$, откуда следует, что функция f является монотонно возрастающей на своей области определения, и поэтому имеет место неравенство $f(x) \ge f(0)$ $(x \in [0;1])$,
или $x - \sin x \ge 0$, $(x \in [0;1])$, откуда следует исходное неравенство.

Задача 6. Доказать, что если $a > b > c$, то $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) > 0$,

Решение. Рассмотрим функцию f: $[0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ вида

$$f(t) = (b + t)^2(b - c) + b^2(c - (b + t)) + c^2((b + t) - b),$$

где a, b, c являются вещественными параметрами, удовлетворяющими неравенству $a > b > c$. Аналогично предыдущим задачам доказывается, что функция f является строго возрастающей на $[0;+\infty)$, и, следовательно, имеет место неравенство $f(a - b) > f(0)$. Последнее неравенство равносильно исходному неравенству.

II. Выпуклость

Определение: Функция $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{I}$ – интервал вещественной оси) называется выпуклой на $\mathbf{I}$, если для всех $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ и любых чисел $\lambda_1\ \lambda_2$ таких что $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. (9)

В случае, когда для всех $x_1 \ne x_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ne 0$ знак в неравенстве (9) является строгим, функция f называется строго выпуклой на $\mathbf{I}$.

Определение (строго) вогнутой функции получается из приведенного выше заменой знака неравенства (9) на противоположный.

Неравенство Иенсена. Пусть $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ - выпуклая функция. Тогда для любых $x_j \in \mathbf{I}$ $(j = 1,...,n)$ и произвольных $\lambda_j \ge 0$ $(j =1,...,n)$ таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ имеет место неравенство

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Решение задач на монотонности и периодичности функции

Большое количество математических методов основано на применении свойств функций.

С функциями, или функциональными зависимостями, человек встречается постоянно в своей профессиональной, учебной и другой деятельности. Задачи экономики, оптимального управления и многие другие требуют описания и исследования функциональных зависимостей между переменными и параметрами реальных процессов. В последние годы математическое моделирование широко используется во многих областях, а это требует основательной подготовки будущих специалистов, а ныне – школьников в области математического анализа.

Пример 1. Укажите наибольшее значение функции y=1 - cos3x .

Решение: Анализируем изменения области значений функции: E(cos3x)=[-1;1] , E(-cos3x)=[]-1;1, тогда E(1- cos3x) =[0;2]. Значит, наибольшее значение данной функции равно 2.

Пример 2. Укажите наибольшее целое значение функции $y = 2,5\sqrt{-5\cos 4x + 8\cos^2 2x + 7}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком корня

$$-5\cos 4x + 8\cos^2 2x + 7 = -5(2\cos^2 2x - 1) + 8\cos^2 2x + 7 = -2\cos^2 2x + 12.$$

Оценим получившееся выражение: $0 \le \cos^2 2x \le 1,\quad -2 \le -2\cos^2 2x \le 0$, $10 \le -2\cos^2 2x + 12 \le 12$. Значит, наибольшее значение данной функции достигается при значении подкоренного выражения 12, т.е. $y_{наиб}= 2,5\sqrt{12} = 2,5\cdot 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.Так как $5\sqrt{3} \approx 8,5$, то наибольшее целое значение функции равно 8.

Ответ: 8.

Пример 3. Укажите наибольшее целое значение функции $y = 2\cdot 5^{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1}$.

Решение. Найдем наибольшее значение функции $g(t)=5^t$, где $t = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1$. Т.к. 5>1, то наибольшее значение показательной функции будет при наибольшем показателе. Преобразуем его: $2(1-\cos^2 x) + 5\cos^2 x - 1 = 3\cos^2 x + 1$. $0 \le \cos^2 x \le 1$, $0 \le 3\cos^2 x \le 3$, $1 \le 3\cos^2 x + 1 \le 4$. Наибольшее t = 4, наибольшее $g = 5^4$.Значит, $y_{наиб.}= 2\ 5^4 =1250$. Ответ. 1250.

Пример 4. Найдите наименьшее целое значени выражения $6\left(\dfrac{2\cos^3 4x - 4\cos^2 2x - \cos 8x + 3}{2(1+\cos 4x)}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. Преобразуем основание степени:

$$\frac{2\cos^3 4x - 4\cdot\dfrac{1+\cos 4x}{2} - (2\cos^2 4x - 1) + 3}{2(1+\cos 4x)} = \frac{2\cos^3 4x - 2 - 2\cos 4x - 2\cos^2 4x + 4}{2(1+\cos 4x)} =$$

$$= \frac{2\cos^3 4x - 2\cos 4x - 2\cos^2 4x + 2}{2(1+\cos 4x)} = \frac{2\cos^2 4x(\cos 4x - 1) - 2(\cos 4x - 1)}{2(\cos 4x + 1)} =$$

$$= \frac{(\cos 4x - 1)(\cos 4x - 1)(\cos 4x + 1)}{(\cos 4x + 1)} = (\cos 4x - 1)^2 = (\cos^2 2x - \sin^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 2x)^2 =$$

$$= (-2\sin^2 2x)^2 = 4\sin^4 2x.$$

Исходное выражение равно $6(4\sin^4 2x)^{-\frac{1}{2}} = 6\cdot\dfrac{1}{2\sin^2 2x} = \dfrac{3}{\sin^2 2x}$.

Так как $0 \le \sin^2 2x \le 1$, то $\dfrac{3}{\sin^2 2x} \ge 3$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения, если оно существует, равно 3. Найдем, при каких значениях x значение полученного выражения равно трем. При $\sin^2 2x = 1$, $2x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

При полученных значениях x исходное выражение не существует, т.к. знаменатель равен нулю. Значит, наименьшее значение выражения рано 4. Ответ: 4.

Пример 5. Найдите наименьшее значение функции $y=9+4\sin x-\cos^2 x$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, преобразуем функцию:

$$y=9+4\sin x - (1-\sin^2 x),\ y =\sin^2 x+4\sin x+8.$$

Выражение $\sin^2 x+4\sin x+8$ - квадратный трехчлен относительно sinx. Выделив в нем полный квадрат, получим $y=(\sin x+2)^2+4$.

Поскольку - 1≤sinx≤1, то – 1 + 2≤sinx+2≤1+2, т.е. 1≤ sinx+2≤3. Отсюда, возведя в квадрат обе части каждого из неравенств, получим $1 \le (\sin x + 2)^2 \le 9$ и $5 \le (\sin x + 2)^2 + 4 \le 13$.
Таким образом, наименьшее значение рассматриваемой функции равно 5.

Пример 6. Найдите область значений E(y) функции $y=\log_{0,5}(4-2\cdot3^x = 9^x)$.

Решение. Решим это задание *методом последовательного нахождения значений сложных аргументов функции.* $\frac{3}{\sin^2 2x} = 3$

Выделив полный квадрат под логарифмом, преобразуем функцию $y=\log_{0,5}\left(5-\left(1+2\cdot3^x+3^{2x}\right)\right)$, $y=\log_{0,5}\left(5-\left(1+3^x\right)^2\right)$ и последовательно найдем множества значений ее сложных аргументов:

$E(3^x)=(0;+\infty)$, $E(3^x+1)=(1;+\infty)$, $E(-(3^x+1)^2)=(-\infty;-1)$, $E(5-(3^x+1)^2)=(-\infty;4)$.

Обозначим ***t***$=5-(3^x+1)^2$, где ***t*€**$(-\infty;4)$. Тем самым задача сводится к нахождению множества значений функции ***t***$=5-(3^x+1)^2$на луче $(-\infty;4)$. Так как функция $y=\log_{0,5}t$ определена лишь при ***t* €**$(0;+\infty)$, то ее множество значений на луче $(-\infty;4)$ совпадает с множеством значений функции на интервале (0; 4), представляющем собой пересечение луча $(-\infty;4)$ с областью определения $(0;+\infty)$ логарифмической функции. На интервале (0; 4) эта функция непрерывна и убывает. При $t \to 0$ она стремится к $+\infty$, а при $t = 4$ принимает значение -2, поэтому $E(y) = (-2;+\infty)$. Заметим, что для решения примера вовсе не требовалось находить предварительно область определения исходной функции, хотя в ходе решения примера обойти эту проблему полностью все же не удалось.

Пример 7. Найдите область значений функции y=cos7x - 5cosx. .

Решение. Решим этот пример ***методом оценок,*** суть которого состоит в оценке непрерывной функции снизу и сверху и в доказательстве достижения функцией нижней и верхней границы оценки. При этом совпадение множества значений функции с промежутком от нижней границы оценки до верхней обуславливается непрерывностью функции и отсутствием у нее других значений. Из неравенств $-1 \le \cos 7x \le 1$, $-5 \le 5\cos x \le 5$ получим оценку $-6 \le y \le 6$. При $x=\pi$ и $x=0$ функция принимает значения -6 и 6, т.е. достигает нижней и верхней границы оценки. Как линейная комбинация непрерывных функций $\cos 7x$ и $\cos x$, функция y непрерывна на всей числовой оси. Поэтому по свойству непрерывной функции она принимает все значения с -6 до 6 включительно, и только их, так как в силу неравенств $-6 \le y \le 6$ другие значения у нее невозможны. Следовательно, $E(y)=[-6;6]$.

Ответ. **E(y)=[-6;6].**

К нахождению множества значений функции сводятся многие задачи с параметром, связанные, в основном, с разрешимостью и числом решений уравнений и неравенств. Например, уравнение f(x)=*a* разрешимо тогда и только тогда, когда *a*€E(f). Аналогично, уравнение f(x)=*a* имеет хотя бы один корень, расположенный на некотором промежутке *X*, или не имеет ни одного корня на этом промежутке тогда и только тогда, когда a принадлежит или не принадлежит множеству значений функции f(x) на промежутке *X*. Также исследуются с привлечением множества значений функции и неравенства f(x)≠*a, f(x)≥a* , и т.д. В частности, f(x)≠*a* для всех допустимых значений *x,* если $a \notin E(f)$.

Пример 8. При каких значениях параметра *a* уравнение $\sqrt{x+5} = a(x^2+4)$ имеет единственный корень на отрезке $[-4;-1]$. **Решение.** Запишем уравнение в виде $\frac{\sqrt{x+5}}{x^2+4} = a$. Последнее уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[-4;-1]$ тогда и только тогда, когда a принадлежит множеству значений функции $y=\frac{\sqrt{x+5}}{x^2+4}$ на отрезке $[-4;-1]$. Найдем это множество, используя свойство непрерывности и монотонности функции. На отрезке $[-4;-1]$ функция $y=x^2+4$ непрерывна, убывает и положительна, поэтому функция $g(x)=\frac{1}{x^2+4}$ непрерывна и возрастает на этом отрезке, так как при делении на положительную функцию характер монотонности функции меняется на противоположный. Функция $h(x)=\sqrt{x+5}$ непрерывна и возрастает в своей области определения $D(h)=[-5;+\infty)$ и, в частности, на отрезке $[-4;-1]$, где она, кроме того, положительна. Тогда функция $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, как произведение двух непрерывных, возрастающих и положительных функций, также непрерывна и возрастает на отрезке $[-4;-1]$, поэтому ее множество значений на $[-4;-1]$ есть отрезок $[f(-4);f(-1)]=[0,05;0,4]$. Следовательно, уравнение имеет решение на отрезке $[-4;-1]$, причем единственное (по свойству непрерывной монотонной функции), при $a \in [0,05;0,4]$.Ответ: $a \in [0,05;0,4]$.

Как уже отмечалось, разрешимость уравнения $f(x)=a$ на некотором промежутке X равносильна принадлежности значений параметра a множеству значений функции $f(x)$ на *X.* Следовательно, *множество значений функции* $f(x)$ *на промежутке X совпадает с множеством значений параметра* a*, для которых уравнение* $f(x)=a$ *имеет хотя бы один корень на промежутке X.* В частности, область значения $E(f)$ функции $f(x)$ совпадает с множеством значений параметра a, для которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один корень.

Пример 9. Найдите область значений $E(f)$ функции $f(x)=\frac{2x^2-4x+1}{x^2+3}$.

Решение. Решим пример ***методом введения параметра***, согласно которому $E(f)$ совпадает с множеством значений параметра *a*, для которых уравнение $\frac{2x^2-4x+1}{x^2+3}=a \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=a(x^2+3)$ $\Leftrightarrow (2-a)x^2-4x+1-3a=0$ имеет хотя бы один корень.

При *a*=2 уравнение является линейным -4x-5=0 с ненулевым коэффициентом при неизвестной x, поэтому имеет решение. При *a≠2* уравнение является квадратным, поэтому оно разрешимо тогда и только тогда, когда его дискриминант $D \ge 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} \ge 0 \Leftrightarrow 3a^2-7a-2 \le 0$ $\Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{73}}{6} \le a \le \frac{7+\sqrt{73}}{6}$. Так как точка $a=2$ принадлежит отрезку $\left[\frac{7-\sqrt{73}}{6};\frac{7+\sqrt{73}}{6}\right]$, то искомым множеством значений параметра a, значит, и областью значений $E(f)$ будет весь отрезок. Ответ: $\left[\frac{7-\sqrt{73}}{6};\frac{7+\sqrt{73}}{6}\right]$.

Как непосредственное развитие метода введения параметра при нахождении множества значений функции, можно рассматривать ***метод обратной функции,*** для нахождения которой надо решить относительно x уравнение $f(x)=y$, считая *y* параметром. Если это уравнение имеет единственное решение $x=g(y)$, то область значений $E(f)$ исходной функции $f(x)$ совпадает с областью определения $D(g)$ обратной функции $g(y)$. Если же уравнение $f(x)=y$ имеет несколько решений $x=g_1(y),\ \ x=g_2(y)$ и т.д., то $E(f)$ равна объединению областей определения функций $g_1(y),\ g_2(y)$ и т.д.

Пример 10. Найдите область значений $E(y)$ функции $y=5^{\frac{2}{1-3^x}}$.

Решение. Из уравнения $$5^{\frac{2}{1-3^x}}=y \Leftrightarrow \frac{2}{1-3^x}=\log_5 y \Leftrightarrow 3^x=\frac{\log_5 y-2}{\log_5 y}$$ найдем обратную функцию $x=\log_3\left(\frac{\log_5 y-2}{\log_5 y}\right)$ и ее область определения $D(x)$: $\frac{\log_5 y-2}{\log_5 y}$ > 0 $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\log_5 y>2\\ \log_5 y<0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>25\\ 0<y<1\end{array}\right. \Leftrightarrow D(x)=(0;1)\cup(25;+\infty)$. Так как уравнение относительно *x* имеет единственное решение, то $E(y)=D(x)=(0;1)\cup(25;+\infty)$. Ответ: $E(y)=(0;1)\cup(25;+\infty)$.

Пример 11. Найдите множество значений функции $f(x)=x^3+3x^2-9x-27$ при тех значениях x, которые принадлежат области определения функции g(*x*)= (-x(x+4)In|*x*|)

Решение. Обозначим через D(g) область определения функции g*(x),* а через*E*-множество значений, принимаемых функцией f(x) при xD*(g).*В D*(g)* входят те x, при которых x(x+4)In|x|<0. Для решения этого неравенства применим метод интервалов, учитывая, что In|x| - чётнаяфункция: x(x+4)In|x|=0, x= -4,0, ±1 т.е. D(*g)* =[-4;-1]U(0;1],Для нахождения множества *E* определим промежуткизнакопостоянства функции f '(x):

f '(x)=$3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=0$, x=-3, x=1. Таким образом, на промежутке [-4;-3] функция f(x) возрастает, а её значения непрерывно изменяются от f(-4)=-7 доf(-3)=0; на [-3;-1] f(x) убывает, значения f(x) изменяются от f(-3)=0 до f(-1)= -16; на (0;1] f(x) убывает, значения f(x) изменяются от f(0)=-27 до f(1)=-32.Объединяя полученные промежутки; находим, что E=[-32;-27)U[-16;0]. Ответ: [-32;-27)U[-16;0].

Пример 12. Решите уравнение $25x^2-20x+6=(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4})(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4})$.

Решение.

1)Рассмотрим левую часть уравнения: $25x^2-20x+6=(5x-2)^2+2$. Ее значения при любых значениях x больше либо равны 2.

2) Рассмотрим правую часть уравнения: $(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4})(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4})=2-\cos^2\frac{5\pi x}{5}$.

Так как $0\le\cos^2\frac{5\pi x}{4}\le 1$, то $-1\le-\cos^2\frac{5\pi x}{4}\le 0$. Значит, $1\le 2-\cos^2\frac{5\pi x}{4}\le 2$. При любых значениях x правая часть уравнения меньше либо равна 2.

3) Равенство левой и правой частей возможно лишь в случае, когда обе части равны 2, т.е. $\begin{cases}(5x-2)^2+2=2,\\ 2-\cos^2\frac{5\pi x}{4}=2.\end{cases}$.

Из первого уравнения системы получаем x=0,4. Этот корень обращает второе уравнение в верное равенство. Ответ: 0,4.

Монотонность

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: подбираем корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности доказываем, что других корней нет.

Задача 1.Решить уравнение $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

Решение. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+4}+x-2$ с областью определения $E=[-4;+\infty)$.

Заметим, что f(0)=0, так что x=0 - корень нашего уравнения. Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=x-2$, функция f также является монотонно возрастающей на множестве E. Следовательно, ни при каких значениях x, кроме нуля, функция f в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет. Ответ: 0.

Задача 2. Решить неравенство $\sqrt{2-x}<x+4$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде $f(x)<0$, где $f(x)=\sqrt{2-x}+(-x-4)$.

Областью определения функции f является множество $E=(-\infty;2]$. Будучи суммой двух монотонно убывающих функций $y=\sqrt{2-x}$ и $y=-x-2$, функция f монотонно убывает на множестве E.

Заметим, что $f(-2)=0$; следовательно, неравенство $f(x)<0$ равносильно системе

($x>-2$, $x\in E\Leftrightarrow -2<x^{6}2$.

Ответ: $(-2;2]$. 1

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{x+1}-1\le -x|x-2|-4x$.

Решение. Запишем наше неравенство в виде $f(x)\le 1$, где $f(x)=\sqrt{x+1}+x|x-2|+4x$.

Функция $g(x)=\sqrt{x+1}$ монотонно возрастает на своей области определения $E=[-1;+\infty)$.

Рассмотрим функцию $h(x)=x|x-2|+4x=6x-x^2$, если $x\le 2$ и x^2+2x, если $x>2$.

Функция $y=6x-x^2$ монотонно возрастает при $x\ge 3$ (и, в частности, при $x\ge 2$), а функция $y=x^2+2x$ монотонно возрастает при $x>-1$ (и, в частности, при $x>2$); поэтому функция h монотонно возрастает на всей числовой прямой (для наглядности постройте график $y=h(x)$).

Значит, функция $f(x)=g(x)+h(x)$ монотонно возрастает на множестве E. Замечая, что f(0)=1, приходим к выводу, что наше неравенство $f(x)<1$ равносильно системе ($x\le 0$, $x\in E\Leftrightarrow -1\le x\le 0$. Ответ: $[-1;0]$.

Задача 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x-a|+2x+4x=8|x+1|$ не имеет ни одного корня.

Решение. Запишем уравнение в виде f(x)=0, где $f(x)=|x-a|+2x+4x-8|x+1|$.

Функция f является кусочно-линейной: на каком бы промежутке мы ни снимали модули, наша функция будет иметь вид $f(x)=kx+b$. Если $x\in E_1=(-\infty;-1]$, то наименьшее возможное значение k равно $-1-2+4+8=9$; следовательно, $k>0$ при любом $x\in E_1$, и функция f монотонно возрастает на множестве E_1. Если же $x\in E_2=(-1;+\infty)$, то наибольшее возможное значение k равно $1+2+4-8=-1$; значит, $k<0$ при всех $x\in E_2$, и функция f монотонно убывает на множестве E2. Таким образом, функция f достигает в точке $x=-1$ своего наибольшего значения на R; множество значений функции f есть луч $(-\infty; c]$, где $c=f(-1)=|a+1|-2-4$.

Уравнение f(x)=0 не имеет решений тогда и только тогда, когда $c<0$, то есть

$|a+1|-2-4<0 \Leftrightarrow |a+1|-2<4 \Leftrightarrow -4<|a+1|-2<4 \Leftrightarrow -2<|a+1|<6 \Leftrightarrow -7<a<5$. Ответ: $(-7;5)$.

Задача 5. Решите уравнение: $3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^3=540^{8-x}$

Решение. Так как в левой части уравнения $3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^3=540^{8-x}$ стоит непрерывная возрастающая функция, а в правой - непрерывная убывающая, то оно имеет не более одного корня. Так как $540=3^3\cdot 4\cdot 5$, то $3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^3=3^{3(8-x)}\cdot 4^{(8-x)}\cdot 5^{(8-x)}$. Легко видеть, что *x*=2 является корнем. Ответ*:* 2.

Симметрия, периодичность

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.

Задача 1. Решите уравнение $f(\sqrt{x+4})=f(2x)$, где $f(t)=2t-t^2$ при всех действительных t.

Решение. Парабола $y=2t-t^2$ симметрична относительно прямой $t=1$, поэтому значения этой функции в точках t_1 и t_2могут совпадать в двух случаях - если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки t=1: $f(t_1)=f(t_2) \Leftrightarrow t_1= t_2, (t_1+ t_2)\backslash 2=1$.

Таким образом, имеем: $f(\sqrt{x+4})=f(2x) \Leftrightarrow \sqrt{x+4}=2x, \sqrt{x+4} +2x=2$. (1)

Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$$x+4=4x^2, x>0 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{65}\ 2 .$$

Второе уравнение совокупности (1) имеет корень x=0, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

Ответ: 0, $1+\sqrt{65}\backslash 8$.

Задача 2. Пусть f(x) — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$. (*)

Решение. Обе части уравнения (*) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно). В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (*) на отрезке [0;8], после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого 8n, $n \in Z$. Обозначим $t=2x+16$. Имеем два различных случая расположения переменной x на рассматриваемом отрезке [0; 8]. 1. Если $x \in E_1=[0; 4]$, то $t\in[16;24]$, и тогда $f(2x+16)=f(t)=8(t-16)-(t-16)^2=8\cdot 2x-(2x)^2=16x-4x^2$.

Уравнение (*) принимает вид $16x-4x^2+23=5(8x-x^2) \Leftrightarrow x^2-24x+23=0 \Leftrightarrow x=1, x=23$. Множеству E_1 принадлежит только x=1,2.

Если $x\in E_2= [4;8]$, то $t\in[24;32]$, и т огда $f(2x+16)=f(t)=8(t-24)-(t-24)^2 = 8(2x-8)-(2x-8)^2=$

$$= -4x^2+48x-128.$$

Теперь уравнение (*) принимает вид: $-4x^2+48x-128+23=5(8x-x^2) \Leftrightarrow x^2+8x-105=0 \Leftrightarrow x=7, x= -15$.

Множеству E_2 принадлежит только x=7. Итак, на отрезке [0;8] уравнение (*) имеет два корня: x=1 и x=7. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий: 1+8n и 7+8n, $n\in Z$.

Ответ: 1+8n, 7+8n, $n\in Z$.

Задача 3. При каких значениях b и c парабола $y=x^2+bx+c$ касается прямой $y=4x+1$ в точке с абсциссой x=1?

Решение. Найдем координаты точки касания прямой $y=4x+1$ и параболы $y=x^2+bx+c$. x=1, y=5. Поскольку (1;5) – точка касания, то в этой точке должно выполняться следующее равенство 1+b+c=5. Угловой коэффициент касательной равен 4, значит 2x+b=4 при x=1, то есть 2+b =4. Откуда b=2, c=2.

Ответ: b=2, c=2.

Задача 4. Показать, что ни одна касательная к графику функции $y=x^3+x^2+x+1$ не параллельна оси Ox.

Решение. Если касательная к графику функции параллельна оси Ox, то $y'(x_0)$ должно быть равно нулю. Найдем производную данной функции. $y'(x)=3x^2+2x+1$. Решая уравнение $3x^2+2x+1=0$, получаем: корней нет.

Задача 5. Составьте уравнение всех общих касательных к графикам функций $y=x^2-x+1$ и

$$y=2x^2-x+0,5.$$

Решение. Данные функции дифференцируемы на R и потому их графики имеют невертикальную касательную в любой точке. Если y=kx+b - уравнение искомой касательной, то каждое из уравнений $x^2-x+1=kx+b$ и $2x^2-x+0,5=kx+b$ должны иметь единственный корень (касательная к параболе имеет только одну общую точку с параболой - точку касания). Значит, дискриминант каждого уравнения должен быть равен нулю.

$$x^2-x(1+ k)+1-b=0, D_1=k^2+2k+4b-3.$$

$$2x^2-x(1+k)+0.5-b=0, D_2=k^2+2k+8b-3.$$

Параметры k и b должны удовлетворять системе: $k^2+2k+4b-3=0, k^2+2k+8b-3=0$.

Почленно вычитанием из второго уравнения первое, находим уравнения общих касательных к графикам данных функций: y=x или y=-3x.

Задача 6. Известно, что прямая, заданная уравнением y = - 9x + 2, является касательной к графику функции $y=x^3-7x^2+2x-3$. Найдите координаты точки касания.

Решение.

1 способ. По условию производная функции $f(x)=x^3-7x^2+2x-3$ в точке x_0, должна быть равна угловому коэффициенту касательной и значения данных функций в точке x_0 должны совпадать.

$$f'(x)=3x^2-14x+2.$$

Имеем систему: $3x_0^2-14x_0+2=- 9, 3x_0^2-14x_0+11=0, x_0=1$ или $x_0=11\backslash 3$.

Легко проверить, что $x_0=1$ удовлетворяет и второму уравнению, а $x_0=11\backslash 3$ не удовлетворяет ему. Поэтому точкой касания данной прямой $y=-9x+2$ и графика функции $y=x^3-7x^2+2x-3$ будет точка A(1;7).

2 способ. Если прямая $y=-9x+2$ является касательной к графику функции $y=x^3-7x^2+2x-3$ в точке с абсциссой x_0, то значение x_0 должно быть корнем кратности не менее двух уравнения

$x^3-7x^2+2x-3=-9x+2$. Преобразуем это уравнение:

$$x^3-7x^2+11x-5=0,$$
$$(x^3- x^2)-(6x^2- 6x)+(5x-5)=0,$$
$$x^2(x - 1)-6x(x-1)+5(x-1)=0,$$
$$(x-1)(x^2-6x+5)=0,$$
$$(x-1)(x-1)(x-5)=0.$$

Следовательно, $x=1$ является корнем кратности два, а $x=5$ – корнем первой кратности. Поэтому точка A(1;-7) - точка касания, а B(5;-43) - точка пересечения прямой $y=-9x+2$ и графика функции $y=x^3-7x^2+2x-3$. Ответ: (1;-7).

Задача 7.Парабола с вершиной на оси абсцисс касается прямой $y = x$ в точке A(-1;-1). Найдите уравнение параболы.

Решение. Так как вершина параболы находится на оси абсцисс, то уравнение параболы имеет вид $y=m(x-a)^2$, где $m \neq 0$. Определим m и a.

1 способ. $y'(x)=2m\cdot(x-a)$; $y'(-1)=-2m(1+a)$. По условию угловой коэффициент касательной равен 1, значит, $-2m(1+a)=1$. Точка A(-1;-1) принадлежит параболе, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, то есть $-1=m(-1-a)^2$. Решаясистему: $-2m(1+a)=1$, $-1=m(-1-a)^2$, находим: $a=1$, $m=-1\backslash 4$. Тогда искомое уравнение касательной будет: $y = -0{,}25(x-1)^2$.

2 способ. Так как прямая $y=x$ касается параболы $y=m(x - a)^2$ в точке A(-1; -1), то корень $x= -1$ будет корнем второй кратности уравнения $m(x-a)^2=x$ и $m(-1-a)^2=-1$. Отсюда $m=-1\backslash(1+a)^2$, $a \neq -1$. Поэтому должно выполняться равенство $(x-a)^2=x$; $(x-a)^2=-x(1+a)^2$, $x^2+(1+a^2)x+a^2=0$. Но последнее уравнение должно иметь один корень, поэтому его дискриминант равен нулю. $D=a^4+2a^2+1-4a^2=(a^2-1)^2=0$, $a=\pm1$.

Имеем $a=1$, $m=-0{,}25$. Ответ: $y = -0{,}25(x-1)^2$.

Задача 8. При каких значениях параметра b прямая $y=x+b$ является касательной к кривой

$$y = |x-2| \bullet x + 3?$$

Решение. Уравнение кривой $y = (x - 2) \bullet x + 3 = x^2 - 2x + 3$, при $x \geq 2$ и

$y = (- x + 2) \bullet x + 3 = - x^2 + 2x + 3$, при $x<2$.

Выясним, может ли прямая $y=x+b$ касаться функции $y=x^2-2x+3$ при $x \geq 2$.

Из равенства значений функций и равенства производных, получаем:

$2x - 2 = 1$ и $x + b = x^2 - 2x + 3$. Из первого уравнения получаем $x=1{,}5$, что не удовлетворяет условию $x\geq2$.

Это означает, что при $x \geq2$ данная прямая не касается функции.

Выясним, может ли прямая $y=x+b$ касаться функции $y=- x^2+2x+3$ при $x<2$.

Из равенства значений функций и равенства производных, получаем:

$- 2x+2=1$ и $x+b=- x^2+2x+3$. Из первого уравнения получаем $x=0{,}5$, подставляя во второе уравнение это значение, получим $b=3{,}25$. Ответ: $b=3{,}25$.

Задача 9. Найдите значение *a,* при котором касательная к параболе $y=2x^2+3x+5$ в точке $x_0=-2$ является касательной к параболе $y=-x^2+4x+a$.

Решение. Найдем уравнение касательной к графику функции $y=2x^2+3x+5$ в точке $x_0=-2$.

$$y(-2) = 7,\ y'(x) = 4x + 3,\ y'(-2)= -5.\ y= 7 -5(x+2) = -5x - 3.$$

Найдем абсциссу точки, в которой прямая $y= -5x -3$ является касательной к графику функции $y=-x^2+4x+a$.

$y'(x_0)=-2x_0+4=-5$. Значит, $x_0=4{,}5$. Найдем значение функции $y=-x^2+4x+a$ при $x=4{,}5$.

$y(4{,}5)=- 4{,}5^2+4\cdot4{,}5+a=-2{,}25+a$, и значение касательной $y=-5x-3$ при $x_0=4{,}5$, $y(4{,}5)=-5\cdot 4{,}5-3=-25{,}5$.

Из равенства $-2{,}25+a=-25{,}5$ найдем значение a, $a=-23{,}25$. Ответ: $a = -23{,}25$.

Задача 10. На какое расстояние нужно сдвинуть параболу $y=4-x^2$ вдоль оси Ox вправо, чтобы прямая $y=-8x+38$ стала касательной к ней?

Решение. Пусть a – расстояние на которое нужно сдвинуть параболу вдоль оси Ox, тогда уравнение параболы примет вид: $y=4- (x-a)^2$. Зная, что $y=-8x+38$ является касательной к графику этой функции, получим: $y'(x_0) = -2(x-a)=-8$ и $4-(x-a)^2=-8x+38$. Откуда, $a=2{,}25$. Ответ: 2,25.

Задача 11. Дана прямая $y=x-2+4$. После поворота на некоторый острый угол вокруг точки M, лежащей на этой же прямой, прямая становится касательной к графику функции $y = 4x^3 - 3x^2 -18x - 7$ в точке с абсциссой $x=-1$. Найдите угол поворота и координаты точки M.

Решение. В тексте задачи находим видовую «подзадачу»: данная прямая после поворота становится касательной к графику функцииf(x) $= 4x^3 - 3x^2 -18x - 7$ в точке с абсциссой $x_0 =1$. Уравнение этой касательной будем искать в виде $y=f(x_0) +f'(x_0)(x-x_0)$,где $x_0 = -1$; $f(x_0) = -4-3+18-7 = 4$;

$$f'(x_0)=12x_0^2 - 6x_0 - 18;\ f'(-1)=12+ 6-18=0.$$

Итак, $y=4$ - уравнение искомой касательной. Значит, после поворота на некоторый угол вокруг точки M прямая $y=x-2+4$ переходи т в прямую $y=4$. Точка M является точкой пересечения указанных прямых, т.е. $y_м=4$ и тогда $x_м=2$; M(2;4). Очевидно, что прямая $y=4$ параллельна оси Ox и поэтому тангенс искомого угла поворота данной прямой равен угловому коэффициенту этой прямой: tgα= , α=60°. Ответ: 60°; M(2;4)

Задача 12. Периодическая функция y=f(x) определена для всех действительных чисел.

Её период равен 3 и f(2)=7. Найдите значение выражения f(-4) - 3f(5).

Решение. f(-4) - 3f(5)=f(2 - 3·2) - 3f{2+3)=7-3·7=-14. *Ответ:* -14.

Задача13. Периодическая функция y=f(x) определена для всех действительных чисел.

Её период равен 6. На рисунке изображен её график на промежутке [-1;5]. Найдите значение выражения f(42)- f(21) + 3f(13).

Решение.f(0) =0; f(3) = -1; f(1) - -1;f(0+ 6·7) -f(3+6·3) + 3f(1 + 6 ·2) = 0 - (-1) + 3(-l) = -2. *Ответ:* -2.

Задача14. Периодическая функция y=f(x) с периодом, равным 5, определена для всех действительных чисел. На промежутке (-2;3] значения функции y=f(x) совпадают со значениями функции $y=x^3$ - 4x. Вычислите значение f(12).

Решение. f(12)=f(2+2·5); 2^3- 4·2=0. Ответ: 0.

Задача15. Нечётная функция *y*=f*(*x*)* определена на всей числовой прямой.

Для всякого неположительного значения x значение этой функции совпадает со значением функции g*(x)*=x^3(x-7)(5x+1)(3x+11). Сколько корней имеет уравнение f(x)=0?

Решение. Та как график нечетной функции симметричен относительно начала координат O, то точки пересечения этого графика с осью OX (нули функции) тоже симметричны относительно точки O. Отрицательные корни уравнения f(x)=0: x_1=-; x_2 =- . Симметричные им точки x'_1=; x_2' = являются корнями уравнения f(x)=0. И еще один корень x_0= 0, который сам себе симметричен. Ответ: 5.

Задача16. Чётная функция y=f(x) определена на всей прямой. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y=f(x+1) в точке с абсциссой x_o=-4, если f'(3)=1.

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику *y*=f(x+1) в точке *x*=-4 равен угловому коэффициенту .касательной к графику *y*=f(x) точке *x*=-3, который, в свою очередь, равен угловому коэффициенту касательной к графику y=f(x) в точке *x*=3, взятому с противоположным знаком (график *y*=f(x) симметричен относительно оси Oy, при отражении любой прямой относительно оси Oy*,* её угловой коэффициент меняет знак). Т.е. искомый угловой коэффициент равен f '(3) = -1. Ответ: -1.

Задача17, Нечётная функция y=fx) определена на всей числовой прямой. Её график на отрицательной полуоси совпадает с графиком функции y=x(x+2)(x-1)(2x+1).Сколько корней имеет уравнение f(x-1)=0 на интервале (-2,5;2,5)?

Решение. Функция *y*=f(x) нечетная и определена на всей числовой оси, поэтому ее график проходит через начало координат. Уравнение x (x+2)(x-1)(2x+1)=0 на отрицательной полуоси имеет корни

x=-2,x=-1\2. Уравнение f(x)=0 имеет корни x=0, x=-2, =-1\2 , x=2, x=1 . Тогда уравнение f(x-1)=0 на интервале (-2,5;2,5) имеет корни x=1, x=-1, x=-1\2, x =1 .Ответ*:* 4.

Задача18. Нечётная функция y=f(x) определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции g(x)=5x^3sinx-6x^2. Какое количество отрицательных целых чисел является решением неравенства

|f (x) +g(x)|≥1?

Решение. Заметим, что функция g*(x)* - четная, так как

g (-x) = 5$(-x)^3$sin(-x)-6$(-x)^2$=(-5x^3)·(-sinx)-6x^2=5x^3sinx-6x^2=g*(x)*. Функция f(x) -нечетная и при неотрицательных *x* совпадает с функцией g*(x),*а потому для любого x_0>0 выполняется f*(*-x_o*)*=-f*(*x_o*)*=-g*(*x_o*)*.

В то же время в силу четности функции g*{x)* для любого x_o>0 выполняется g*(*-x_o*)*=g*(*x_o*)*

Следовательно, для любого x_o>0 справедливо равенство f(-x_o*)* + g*(*-x_o*)*= - g*(*x_o*)*+g*(*x_o*)*=0.

Последнее равенство означает, что при отрицательных значениях аргумента *x* функция h*(*x*)* = f*(*x*)*+g*(*x*)* тождественно равна нулю и не может быть больше или равной единице. Ответ: 0.

Задача19. Чётная функция y=f(x) определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции g(x)=-x(x^2-1)(x^2-9). Какое количество целых чисел из отрезка [-5;2] является решением уравнения

|f(x) + g(x)| = 2f(x)?

Решение. Заметим, что функция g*(x)* - нечетная, так как

g*(*-x*)*=-*(-x)((-x)*^{2}-1)((-*x)*^{2}-9)=x(x^2-1)(x^2-9)=-g*(x)*.

Так как g*(x)* - нечетная функция, то ее график симметричен относительно начала координат, а так как функция f*(*x*)* - четная, то ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому в силу того, что графики функций f*(*x*)* и g*{x)* совладают при неположительных значениях аргумента x, и в силу указанной симметрии графиков, при положительных значениях аргумента *x* график функции fix*)* симметричен графику функции g*(x)* относительно оси Ox. Значит, f(x)+g(x)=2f(x*)* при неположительных значениях аргумента *x* и f*(*x*)*+g*(x)* 0 при всех положительных значениях аргумента *x.*Следовательно, при положительных значениях аргумента*x* уравнение |f*(*x*)*+g*(x)*|=2f*(*x*)*равносильно системеf(x)=0,x>0.x_1=1, x_2=3, а при неположительных значениях аргумента x уравнение |f*(*x+g*(x)*|=2f(x) принимает вид|2f(x)|=2f(x),а потому равносильно системе неравенств f(x)=0,x ≤0,-x(x^2-l)(x^2-9)≤0, -x(x-l)(x+l)(x-3)(x+3)≤0,x≤0,x€(-5;-3][-l;0]U[1;3],

Таким образом, на всем множестве действительных чисел множеством решений уравнения |f(x)+g(x)|=2f(x) является множество (-5;-3]U[-l;0]U{1}U{3}. Выбирая из него целые числа, принадлежащие отрезку [-5;2] получаем ответ: 6.

Задача 20. Известно, что график чётной функции y = f(x) пересекает ось Ox в пяти точках. Найдите сумму всех корней уравнения f(x-2)=0.Известно, что график чётной функции *y*=f(x) пересекает ось Ox в пяти точках. Найдите сумму всех корней уравнения f(x-2)=0.

Решение. Поскольку множество корней уравнения f(x-2)=0 получается из множества корней уравнения f(x)=0, которое по условию имеет пять корней, сдвигом на 2 единицы по оси Ox вправо, то сумма всехкорней уравнения f(x-2)=0 на 10 больше, чем сумма всех корней уравнения f(x)=0. Так как функция y=f(x) четна, то множество точек пересечения её графика с осью Ox симметрично относительно начала координат, т.е. сумма всех корней уравнения f(x)=0 равна нулю, а сумма всех корней уравнения f(x-2)=0 равна 10. Ответ*:* 10.